



Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Septiembre-Diciembre 2017

Nombre: _____

Carné: _____ Sección: _____

1er. Parcial de Matemáticas VII. Bloque A.

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE: $u(x) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(z)$ ($a, \omega \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$).

Propiedades básicas	Algunas transformadas	Transformadas complementarias
$u'_{\text{gen}}(x) \rightarrow zU(z)$ $xu(x) \rightarrow -U'(z)$ $u(x-a) \rightarrow U(z)e^{-az}$ $e^{\alpha x}u(x) \rightarrow U(z-\alpha)$ $\alpha u(x) + \beta v(x) \rightarrow \alpha U(z) + \beta V(z)$ $(u * v)(x) \rightarrow U(z)V(z)$	$\delta(x) \rightarrow 1$ $\delta^{(k)}(x) \rightarrow z^k$ $H(x) \rightarrow \frac{1}{z}$ $H(x)\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \rightarrow \frac{1}{z^k}$ $H(x)e^{\alpha x} \rightarrow \frac{1}{z-\alpha}$	$H(x)e^{\alpha x}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \rightarrow \frac{1}{(z-\alpha)^k}$ $H(x)\text{sen}(\omega x) \rightarrow \frac{\omega}{z^2 + \omega^2}$ $H(x)\cos(\omega x) \rightarrow \frac{z}{z^2 + \omega^2}$ $H(x)\sinh(\omega x) \rightarrow \frac{\omega}{z^2 - \omega^2}$ $H(x)\cosh(\omega x) \rightarrow \frac{z}{z^2 - \omega^2}$

1. [10 puntos] Considere la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ e^{2x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

Expresé la función generalizada $f'''_{\text{gen}}(x) - 2f''_{\text{gen}}(x) - f'_{\text{gen}}(x) + 2f(x)$ como combinación lineal de funciones delta de Dirac y sus derivadas.

2. [Total: 12 puntos] Considere la ecuación $f''_{\text{gen}}(x) = 2H(x+1) - 2H(x) - 2\delta(x+1) + 2\delta'(x+1) + \delta'(x)$.
- (a) [6 puntos] Halle una función suave a trozos y causal que satisfaga dicha ecuación.
- (b) [6 puntos] Calcule el valor de la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2x} dx$.

3. [14 puntos] Halle una solución causal de la ecuación

$$f(x) = \text{sen } x + 2 \int_0^x \cos(x-t)f(t) dt + \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} \text{sen } x dx.$$

4. [14 puntos] Con el fin de hallar una función anticausal $x(t)$ que satisfaga la ecuación

$$tx''(t) + (t-2)x'(t) + x(t) = 0$$

y las condiciones $x(0) = x'(0) = 0$:

- (a) [4 puntos] Calcule la transformada de Laplace de la función $H(-t)$.
- (b) [10 puntos] Halle una solución que tenga la forma $x(t) = y(t)H(-t)$.

¡Justifique todas sus respuestas!